Hibaszámolás (hibabecslés)

Minden mérési eredmény csak akkor válhat felhasználhatóvá a gyakorlati életben, ha tudjuk, hogy az adott eredmény mekkora pontossággal teljesül, milyen határok között vehető figyelembe, ez az oka annak, hogy a mérési eredményhez mindig meg kell adni a hibakorlátot is.

Közvetlenül mért érték hibája

Tegyük fel, hogy az x mennyiséget többször egymás után megmérjük, és az egymás utáni mérési eredmények rendre x_1, x_2, ... , x_n értékeket adnak. Nem tudjuk, hogy a mérési eredmények közül melyik a pontos - ha egyáltalán van ilyen (ha tudnánk a pontos értéket, nem akarnánk megmérni). Így azt mondjuk, hogy ebben az esetben $\mathbf{x_á}$ = $(\Sigma x_n)/n$ értéket, vagyis a mért értékek számtani közepét **tekintjük pontos értéknek**. Ez persze valószínűleg nem a tényleges értéket adja, de elegendő sok mérést elvégezve bizonyára nagyon jól közelíti azt.
A mért értékek persze többé - kevésbé eltérnek az átlagtól. A mérés **abszolút hibájának** a mért értékeknek az átlagtól mért legnagyobb eltérését nevezzük, azaz képlettel kifejezve $\Delta x = \max |x_i - x_á|$.
Itt az abszolútérték jel mutatja, hogy az eltérés előjele nem számít, csak a nagysága. Előfordulhat, hogy a mérőeszköz pontatlansága miatt hiába végzünk több mérést, mindig ugyanazt az eredményt kapjuk. Ebben az esetben az abszolút hibát a mérőeszköz pontossága, pontosabban szólva a mérőeszköz legkisebb egysége adja. Pl. egy 2 m-es szakaszt mérőszalaggal többször megmérve mindig 2 m az eredmény, itt az abszolút hibát a mérőeszköz legkisebb egysége - ha mm-es beosztású, akkor 1 mm - az abszolút hiba.
Persze az abszolút hiba nem jellemzi jól a mérés pontosságát, hisz pl. a 3 m ± 3mm ugyanakkora abszolút hibát jelent, mint a 30 cm ± 3 mm, holott 3 m-t 3 mm-es pontossággal megmérni nyilván nagyobb "pontosságot" jelent, mint 30 cm-t 3 mm-es pontossággal megmérni. Ezért aztán a mérési pontosságot az abszolút hiba helyett a **relatív hibával** szokás jellemezni. A relatív hiba azt adja meg, hogy a mérés abszolút hibája hányad része a "pontos" értéknek, azaz képlettel kifejezve: $\delta x = \Delta x / x_á$. (A relatív hibát sokszor %-ban adják meg, ilyenkor értelemszerűen $\delta x = (\Delta x / x_á)*100$).
Példa: Tegyük fel, hogy egy adott távolságra 5 mérésből 1,98 m; 1,99 m; 2,00 m; 2,01 m; és 2,02 m eredmények adódnak. Ekkor az általunk pontos értéknek vett $x_á = (\Sigma x_n)/n$ = (1,98 +1,99 +2,00 +2,01 +2,02)/5 = 2,00 m. Az egyes mérési eredmények eltérése az átlagtól -0,02; -0,01; 0; 0,01 illetve 0,02 m, így az abszolút hiba ezek maximuma, azaz Δx = 0,02m. (Az hogy ez az érték kétszer is előfordul az $|x_i - x_á|$ értékek között, természetesen nem szükségszerű.) Így aztán az adott mérés relatív hibája: $\delta x = \Delta x / x_á$ = 0,02m /2 m = 0,01 (amit úgy is írhatunk, hogy 1 %). Vagyis a mért érték a példában: 2 m ± 0,02 m, vagy 2 m ± 1 %.

Nem közvetlenül mért érték hibája, a hibaterjedés törvényei az alapműveletekre

Természetesen az fent leírtak csak akkor használhatók, ha az x értéket közvetlenül mérjük. Bonyolultabb mennyiségek esetén viszont általában a mérési eredményt több - közvetlenül mért - értékből számítással határozzuk meg, azaz a fent leírt módszer ilyenkor direktben nem használható.
Viszont ha ismerjük a hibaterjedés szabályait az alapműveletekre, azaz az összeadandók, szorzandók, stb. hibájának ismeretében meg tudjuk mondani az összeg, szorzat, stb. hibáját, akkor ennek felhasználásával már a nem közvetlenül mért - hanem -számított - érték hibája is megadható.
Mi a hibaterjedés szabályait a relatív hibára ismertetjük.
Összeg relatív hibája: Ha adott két mennyiség a és b, és azok relatív hibái: δ_a és δ_b, akkor az összeg (a+b) relatív hibájára: $\boldsymbol{\delta_{a+b} = \max.(\delta_a;\delta_b)}$,azaz az összeg relatív hibája megegyezik a legnagyobb relatív hibájú tag relatív hibájával. (A valóságban ez a tényleges relatív hiba felső becslése, de egyszerűsége miatt célszerű ezzel számolni).

Szorzat illetve hányados relatív hibája: Szorzat ab illetve hányados a/b relatív hibája a tagok (osztandó, osztó) relatív hibáinak összege:
$\delta_{ab} = \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$.
Különbség relatív hibája: Ha a és b mért mennyiségek relatív hibái δ_a illetve δ_b, akkor az a-b különbség relatív hibája:

$$\delta_{a-b} = \frac{a}{a-b}\cdot\delta_a + \frac{b}{a-b}\cdot\delta_b$$

Az összefüggésből kitűnik, hogy közel azonos mennyiségek kivonása szükségszerűen magas hibát okoz. Pl. tegyük fel, hogy 1 % pontossággal tudunk távolságot mérni. Tegyük fel, hogy egy 10 cm-es szakaszt úgy szeretnék kimérni, hogy egy adott irányba lemérek 5métert, majd visszamérek 490 cm-t. Ez azt jelenti, hogy az első méréskor az 1 %-os hibakorláttal ±5 cm-t, a visszaméréskor ±4,9 cm-t tévedhettem. Mivel ezek a tévedések véletlenszerűek, előállhat olyan eset, mikor egymást "erősítik", azaz összesen akár 9,9 cm is lehet a hibám, ami a 10 cm-es távolságot figyelembe véve, 99 %-os hibának felel meg. Mindez a megadott képlettel:

$$\delta_{5-4,9} = \frac{5}{5-4,9}\cdot 1\% + \frac{4,9}{5-4,9}\cdot 1\% = 99\%$$

Ezekkel az összefüggésekkel tetszőleges összefüggés relatív hibája kiszámolható a benne szereplő kifejezések relatív hibáiból, erre példaként nézzük meg a következő esetet:

A hibaterjedés törvényei az olaj viszkozitásának mérésére
A közvetlenül mért értékekből meghatározzuk az abszolút hibákat (1 mérésnél a mérőeszköz pontossága – hosszúság mérésénél 1 mm, tömegmérésnél 0,001 g, olajsűrűségnél 1 kg/m^3 -, több mérés esetén az átlagtól vett legnagyobb eltérés), majd a relatív hibákat (az abszolút hiba és a mért érték, több mérés esetén az átlag hányadosa). Az ülepedési szakasz hosszának, az ülepedési időnek, a golyók átmérőjének, a tömegmérésnek és az olaj sűrűségének a relatív hibája legyen rendre δ_L, δ_t, δ_d, δ_m , és $\delta_{\rho o}$. Ezen mért értékek hibájára szeretnénk visszavezetni η hibáját.

A viszkozitás hibája a hibaterjedés törvényeinek alkalmazásával:

$$\delta_\eta = \delta_{\frac{2}{9}\frac{(\rho_g-\rho_o)r^2gt}{L}} = \delta_{\frac{(\rho_g-\rho_o)r^2t}{L}} = \delta_{(\rho_g-\rho_o)} + \delta_{r^2} + \delta_t + \delta_L$$

azaz:

$$\delta_\eta = \frac{\rho_g}{(\rho_g-\rho_o)}\cdot\delta_{\rho_g} + \frac{\rho_o}{(\rho_g-\rho_o)}\cdot\delta_o + 2\delta_d + \delta_t + \delta_L$$

mivel

$$\delta_{\rho_g} = \delta_{\frac{m}{\frac{4r^3\pi}{3}}} = \delta_{\frac{m}{r^3}} = \delta_m + \delta_{r^3} = \delta_m + 3\delta_d$$

így

$$\delta_\eta = \frac{\rho_g}{(\rho_g-\rho_o)}\cdot(\delta_m + 3\delta_d) + \frac{\rho_o}{(\rho_g-\rho_o)}\cdot\delta_o + 2\delta_d + \delta_t + \delta_L$$

Ezzel a viszkozitás hibáját visszavezettük a mért értékek hibáira.